עבודה מספר 3:

1)

א.

1

3

2

2

1

על פי האלגוריתם יוחזר כי העפ"מ האדום ביותר

3

הוא (2,3) , (1,3). משקלו הוא 4.

(1,3) , (1,2) הוא עץ פורש ומשקלו 3,

ולכן האלגוריתם החזיר עץ פורש לא מינימלי.

ב.א.

שלב 1: נמיין את צלעות E בסדר עולה לפי משקל (הקלה ביותר תופיע ראשונה, והכבדה תופיע בסוף), כך שלכל כך ש w(v) = w(u) , v יופיע לפני u במערך הממוין, נסמן סידור זה ב A.

שלב 2: הרץ Kruskal על G לפי הסידור A והחזר את העץ המתקבל.

ב.ב.

האלגוריתם יפעל בדיוק כמו Kruskal ולכן יחזיר עפ"מ בוודאות. קיים מיון פנימי בין קשתות בעלות משקל שווה, זאת על מנת להעדיף אדומים. המיון יגרום לכך שלא תבחר קשת רגילה כל עוד נשארה קשת אפשרית לבחירה שהיא אדומה ובכך אכן יחזיר עפ"מ אדום ביותר.

ב.ג.

שלב 1: המיון – O(|E|log(|E|))

שלב 2: Kruskal - O(|E|log(|V|)),

כיוון והגרף קשיר |E| ≥ |V| - 1 , ולכן O(|E|log(|E|)) + O(|E|log(|V|)) = O(|E|log(|E|))

לכן זמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא O(|E|log(|E|)) .

2)

א.

הפרכה

גרף G(V,E) קשיר ולא מכוון אשר קיימות הצלעות כאשר כל צלע בגרף במשקל שונה מהשנייה

צלע בעל משקל מקסימאלי בגרף

צלע בעל משקל מינמאלי בגרף

העץ הפורש המינימאלי של גרף זה יכיל את הצלע לכן הפרכה לטענה

ב.

הוכחה

גרף G(V,E) קשיר ולא מכוון אשר קיימות הצלעות צלע בעל משקל מקסימאלי בגרף

צלע בעל משקל מינמאלי בגרף כאשר כל צלע בגרף במשקל שונה מהשנייה

נניח כי קיים עץ פורש מינימאלי כך ש נבנה חתך מכבד של T אשר חותך את וניצור עץ פורש חדש כאשר במקום הצלע eאשר נמצאת בT וגם בחתך נשים את 'במקומה כלומר  *המשקל של המשקל של*

*נראה עכשיו כי T עדיין עץ פורש מינמאלי אבל ולכן סתירה להנחה שT עץ פורש מינימאלי*

*כלומר כדי שבגרף G שלנו יהיה עץ פורש מינימאלי T, T חייב להכיל את .*

ג.

הוכחה

נניח בשלילה כי קיימים לפחות 2 עפ"מים שונים ל G נקרא להם נחלק ל3 מקרים :

מקרה 1 אזי איננו עפ"מ על G מכיוון שמצאנו עץ פורש קל יותר ()

מקרה 2: אזי איננו עפ"מ על G מכיוון שמצאנו עץ פורש קל יותר ()

מקרה 3:

כיוון ואין זוג צלעות בעל משקל שווה חייב להתקיים כי לכל

*נגדיר את k להיות הצלע בעלת המשקל המינימאלי מקבוצת הצלעות נניח ש k נמצאת ב אזי נוכל להחליף את k בצלע כלשהי ב שעדיין יהיה עץ פורש. כלומר מצאנו עץ פורש קל יותר מ (באופן סימטרי היינו עושים אם k הייתה נמצאת ב ). לכן סתירה לא עפ"מ ולכן סתירה להנחה הראשונית שלנו שקיימים לפחות 2 עפ"מים על G.*

3)

א.

*קיימים שני פתרונות אופטימאלים לבעיה זו*

*1. A,X,B*

*2. A,Y,B*

*ב.*

*האלגוריתם*

*נמיין את מערך G לפי המרחקים d בסדר עולה כך שכל . בהנחה שקיימות תחנות דלק כך שמרחקן מ-A גדול מהמרחק בין A ל- B נמחק אותן וזאת על ידי מציאת תחנה B והרצת האלגוריתם רק על תת המערך שמ-A ל-B*

*נבחר את המרחק הגדול ביותר כך של*

*נחזור על הצעד כך שכל פעם נחפש המרחק הגדול ביותר שקטן מהנקודה בה אנו נמצאים ועוד m,*

*לכל נקודה i נחפש לכל j > i כך עד שנגיע ליעד B*

*ג.*

*הוכחת נכונות*

*יהי מערך תחנות הדלק לאורך הדרך כך ש זה המרחק של תחנת הדלק במקום ה-i*

*מ-A , m זו כמות הדלק שהמיכל יכול להכיל.*

*יהי O פתרון אופטימאלי כלומר טיול מA לB בעל מספר מינימאלי של עצירות. P הפתרון שמחזיר האלגוריתם נראה כי . נגדיר P[i] תת מערך של הפתרון P מ-A ועד לעצירה ה-i , נגדיר O[i] תת מערך של הפתרון O מ-A ועד לעצירה ה-i.*

*זאת מכוון שכל פתרון חוקי חייב להכיל את A כיוון ומרחקו מA מינימאלי הוא תמיד יהיה הראשון במערך.*

*יהי i מספר תחנת הדלק הראשונה כך ש P[i-1] = O[i-1] , .נגדיר:*

*.*

*כעת נגדיר , זהו עדיין תת מערך של פתרון אופטימלי כלשהו, כיוון ו- P[i-1] = O[i-1] אז בחירת G[k] כאיבר הבא הוא בחירה חוקית (על פי בחירת האלגוריתם). ובגלל דרך בחירת האלגוריתם כיוון וגם G[t] הינה בחירה חוקית אזי k>t . ולכן אם O[i+1] הוא תת מערך של פתרון חוקי אזי גם הוא תת מערך של פתרון חוקי כיוון ו אז המרחק בין G[k] לאיבר האחרון ב O[i+1] קטן בוודאות מ m .*

*כך נשנה את הפתרון האופטימלי עד שנגיע ל O' =P. כיוון ובכל החלפה איננו מוסיפים איבר לפתרון האופטימלי אלא מחליפים אחד באחר, משמע כלומר P הוא פתרון אופטימלי כיוון והוא בעל מספר עצירות מינימלי.*

*ד.*

*מיון המערך*

*מחיקת תחנות דלק מיותרות*

*בחירות תחנות עצירה (על ידי חיפוש בינארי)*

*לכן סה"כ זמן הריצה*

*4)*

*א.*

*ב.*

*ג.*

*ד.*

*ה.*

*ו.*

5)

א.

הוכח לא קיים זוג גנראטורים שאחד מהם הוא אשר עונה על הדרישה של לספק מספיק אנרגיה לכן לא קיים פתרון חוקי לבעיה אשר מכיל בתוכו זוג עם

ב.

נחלק ל4 מקרים

מקרה 1: שניהם לא מצוותים כלל ב

על פי הגדרת

*מקרה 2: מצוות* ב*ו לא כך ש כוון ו אזי*

*מקרה 3: לא מצוות* ב*ו כן כך ש כוון ונתון כי*

*אזי*

*מקרה 4: שניהם מצוותים ב אבל לא ביחד כלומר*

*כיוון ו אז וגם נתון*

*לכן*

ג.

האלגוריתם:

נגדיר

נמיין למערך A את הגנראטורים על פי האנרגיה שהם מספקים בסדר עולה

נשמור מצביע לסוף המערך (הגנראטור אשר מפיק את האנרגיה הגבוהה ביותר)MAX ומצביע לתחילת המערך (הגנראטור אשר מפיק את האנרגיה הנמוכה ביותר) MIN

נריץ בלולאה כל עוד MAX גדול מ- MIN:

אם e(A[MAX]) +e(A[MIN]) >= P נוסיף את הזוג הנ"ל לפתרון G , נשים את המצביע MAX על האיבר שלפניו במערך .

נגדיל את MIN באחד

נחזיר את G

הוכחת נכונות:

נוכיח באינדוקציה כי (G הוא הפתרון שהאלגוריתם מחזיר בסוף ההרצה) :

בסיס האינדוקציה:

בצעד האפס: ולכן

הנחת האינדוקציה

צעד האינדוקציה :

*הגנרטורים המקסימאלי והמינימאלי בהתאמה*

*נחלק למקרים:*

*אם לא נוסיף אותם ל G ולכן*

*אחרת נוסיף אותם ל G*

*מ5 סעיף ב' קיים כך ש פתרון חוקי וגם*

*כיוון ו אז לא הורדנו אף זוג מ בבניית וכיוון ו*

*אז . ולכן הוכחנו ש מוכל בפתרון אופטימאלי כלשהו.*

*בזכות האינדוקציה ניתן לומר כי G מוכל ב כלשהו.*

*נניח בשלילה כי G אינו פתרון אופטימאלי כלומר קיים כך ש לא נכנסו לG בשום ציוות. נלך לאיטרציה באלגוריתם שבו נבחר (הגנרטור שלא צוות בG מבין השניים, במידה ורק לא צוות נתייחס ל כאל ) אזי הינו A[MIN] וועל פי 5 סעיף א' לא קיים ציוות חוקי עם . ל מכאן סתירה להנחה.*

*ולכן G הינו פתרון אופטימאלי*